Geometría Vectorial

Gerardo Santana Trujillo

Vilcún, Chile - 2019

La ventaja del tratamiento vectorial no radica sólo en la sencillez de la representación, sino en la unificación de ámbitos matemáticos tan variados como trigonometría, geometría analítica, geometría descriptiva, números complejos, determinantes, matrices, elementos de geometría proyectiva y en la organización en un todo orgánico.

El punto de partida será siempre la representación geométrica. En este sentido a los números reales se los entiende como descripciones de trazos; a los números complejos como descripción de trazos que rotan en el plano; a las matrices como descripciones de afinidades más generales y que conducen a sus enlaces.

A partir de los ejemplos particulares, deberemos tener en cuenta conceptos más abstractos como el de función, composición, grupo, anillo, cuerpo, el de transformación lineal. El más general es el concepto de Espacio Vectorial.

Requisito para entrar en materia son las operaciones básicas del álgebra y la geometría de congruencia y semejanza.

Operaciones Elementales con vectores

Consideremos el espacio euclidiano que corresponde a nuestra percepción habitual. El concepto de vector aparece al estudiar las traslaciones o desplazamientos paralelos en un plano o en el espacio. En una traslación se va desde una figura, (por ejemplo, el triángulo ABC de la Fig.1.) a otra que le es congruente (en la Fig.1, el triángulo A'B'C'). Toda traslación se puede representar con una flecha, un vector, que va desde un punto P cualquiera hasta el punto P', que también podemos llamar la proyección de P. Dado que dos vectores con la misma longitud y misma dirección describen la misma traslación, se los considera iguales.

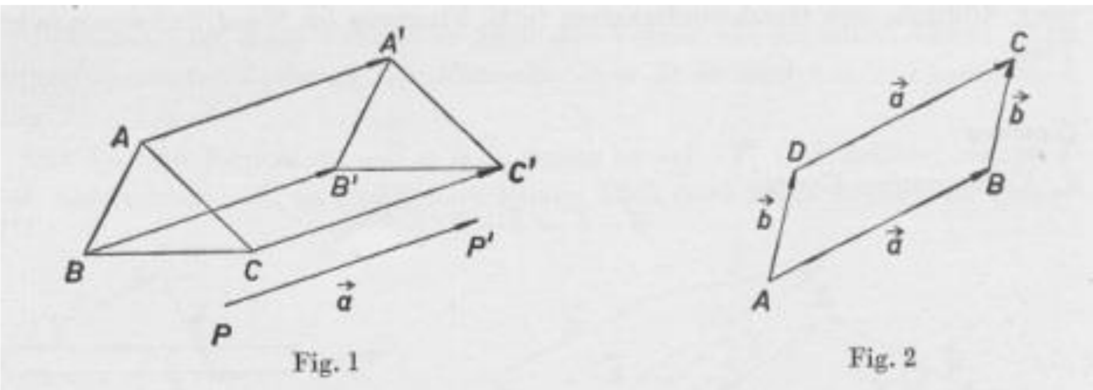

Fig. 1 Fig. 2

A modo de definición: **Dos vectores son iguales si tienen la misma longitud y la misma dirección.**

Entonces como da igual desde que punto de partida se dibuja un vector, hablamos de "vectores libres". (A partir de la definición según la cual dos vectores son iguales si tienen la misma longitud y dirección, no se puede distinguir uno de otro, por ello no hablamos de flechas, sino de "clases de equivalencia de flechas". Un vector se entiende, entonces, como el conjunto de todas la flechas con la misma longitud y dirección. Además, la flecha, que hemos introducido como concepto intuitivo evidente, se puede definir como un par ordenado de puntos).

El concepto de Vector

Escribiremos un vector como una letra con una flecha encima ($\vec{a}$). Un vector con punto de partida A y punto de llegada B se designa con $\overrightarrow{AB}$ (en tanto $\overline{AB}$ representa la longitud del trazo AB y AB, el trazo mismo como objeto geométrico). En la Fig.1, por ejemplo, $\vec{a} = \overrightarrow{PP'}$. Si ABCD es un paralelógramo (Fig.2), entonces, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

La longitud de un vector $\vec{a}$ se representa como, $|a|$ (y leemos, módulo de $\vec{a}$) o incluso simplemente, a (sin flecha). En la Fig.1, por ejemplo: $a = |\vec{a}| = |\overrightarrow{PP'}| = \overline{PP'}$.

En Física llamamos, magnitudes vectoriales a aquellas que pueden determinarse a través de un vector, por ejemplo, velocidades, fuerzas, aceleraciones, por contraste con las magnitudes escalares, que se determinan a través de números reales (por ejemplo, masas, temperaturas, etc.).

Adición y Sustracción de Vectores

Dos traslaciones, dadas a través de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se pueden ensamblar como en la Fig.3. Se va desde la primera traslación de A en B, y se realiza una segunda traslación, desde B hasta C. Entonces el resultado es el de una única traslación desde A hasta C. Esta traslación resultante es el ensamble de las dos traslaciones previas.

Definición: **La suma $\vec{a}+\vec{b}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el vector que corresponde al ensamble de las traslaciones representadas por estos dos vectores.**

De $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, se sigue siempre $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, es decir, que la suma geométrica de dos vectores se obtiene poniendo el punto de partida del segundo vector en el punto de llegada del primer vector y trazando una flecha desde el punto de partida del primer vector hasta el punto de llegada del segundo vector (método de poner uno junto al otro). La suma también se puede obtener poniendo ambos vectores en un mismo punto de partida y dibujando la diagonal del paralelógramo que se forma a partir de ellos (método del paralelógramo. Fig.3

Leyes

Conmutatividad

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \qquad (1)$$

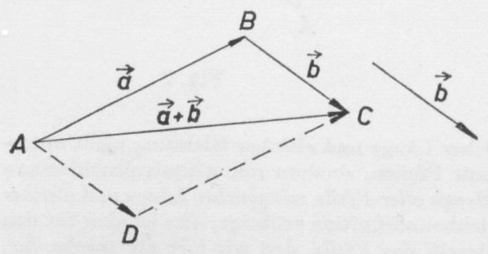

Fig. 3

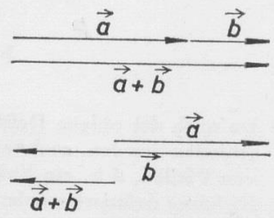

Fig. 4

Se observa que el vector $\vec{a}+\vec{b}$ no depende de la elección del punto de partida de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. En el caso especial en que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en una misma recta, la longitud de $\vec{a}+\vec{b}$ es igual a la suma o la diferencia de las longitudes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ya sea que tengan la misma o la dirección contraria. (Fig.4)

Ejemplos físicos de adición de vectores: adición de fuerzas (Por ejemplo, una nave espacial entre la Tierra y la Luna, expuesta a las fuerzas gravitatorias de ambos cuerpos celestes), adición de velocidades (Por ejemplo, un avión expuesto al viento, un nadador en la corriente de un río).

La ley de conmutatividad de la suma de vectores (y por ende del ensamble de traslaciones) se sigue de la Fig.3, pues,

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **y** $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$**.**

Esto se cumple de la misma manera si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en una misma recta.

Asociatividad

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **(2)**

En la Fig.5, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ y $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$. Por tanto, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ y $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}$. Por tanto, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ y $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}$.

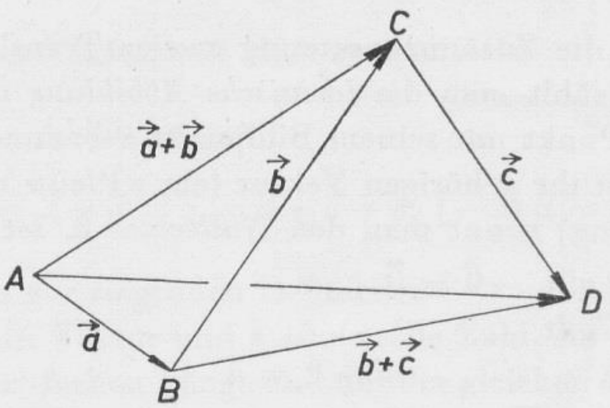

Fig. 5

Ambas expresiones de 2) representan el mismo vector y por ello escribimos sencillamente $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, sin paréntesis. La ley asociativa se cumple, además, para cualquier ensamble de transformaciones uno a uno (inyectivas) del plano o del espacio sobre sí mismos.

De 1) y 2) se sigue que, en una suma de vectores con varios miembros, se debe hacer intercambios y abreviaciones (como se acostumbra en el álgebra para la suma de números). Por ejemplo, se tiene que $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ (Fig.6). Y a la vez, $\vec{e}=\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$ (Fig.7).

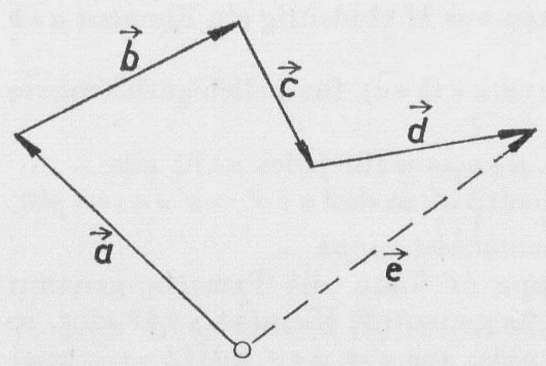

Fig. 6

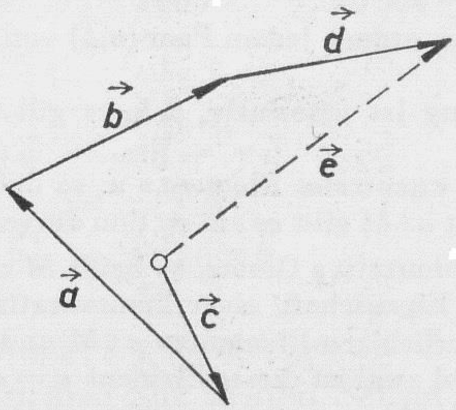

Fig. 7

Vector Opuesto y Vector Nulo

Definición: Si $\vec{a}$ es un vector, el vector con la misma longitud, pero con sentido contrario, se llama vector opuesto de $\vec{a}$ y se escribe $-\vec{a}$ (Fig.8)

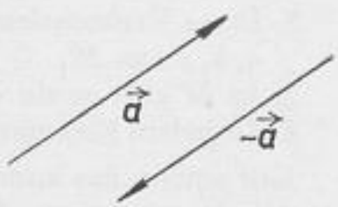

Fig. 8

De $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, se sigue que $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$; asimismo, $-(-\vec{a})=\vec{a}$. Además, si sumamos al vector $\vec{a}$, su opuesto, $-\vec{a}$, no obtenemos ninguna flecha, es decir, no obtenemos traslación alguna. Para que del ensamble de dos traslaciones siempre resulte otra

traslación, incluímos la transformación idéntica del espacio sobre sí mismo y lo mismo para las traslaciones, a partir de lo cual cada punto coincide con su imagen. El vector que le corresponde, una flecha con longitud 0 y sentido indeterminado, se llama vector nulo y se lo denota, $\vec{0}$ **. Si A es un punto, entonces** $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ **. Asimismo,** $-\vec{0}=\vec{0}$ **.**

Para cada vector, se cumple que:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ **(3) (** $\vec{0}$ **es elemento neutro para la suma de vectores)**

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ **(4) (Existencia de un elemento inverso para la suma de vectores)**

Si varios vectores configuran un polígono no necesariamente regular (que podemos llamar polígono vectorial), entonces la suma de ellos es el vector nulo. Se tiene como en la Fig.9: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

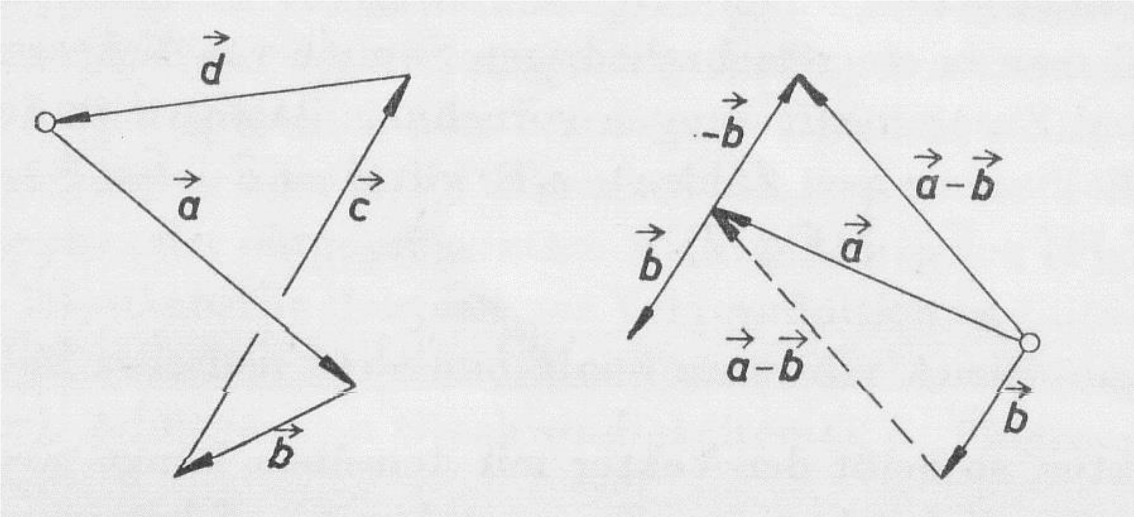

Fig. 9 Fig. 10

Observamos que, a partir de las propiedades de la adición de vectores, éstos configuran un grupo conmutativo o abeliano. El elemento neutro es el vector nulo, $\vec{0}$ **, y el elemento inverso para cada vector** $\vec{a}$ **es su opuesto,** $-\vec{a}$ **.**

Definición: Se entiende como diferencia o resta de dos vectores $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **al vector,** $\vec{a}+(-\vec{b})$ **.**

Para cada par de vectores $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **hay siempre exactamente un vector,** $\vec{c}$ **, tal que** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ **de donde** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ **(Fig.10)**

Nota: Llamamos grupo a la estructura matemática generada a partir de un conjunto, digamos A, no vacío de elementos y en el cual se define una operación, por ejemplo, *. Diremos que (A,*) es un grupo, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall a,b\in A, a*b\in A$ **(Cerradura o clausura)**

2. $\forall a,b,c\in A,(a*b)*c=a*(b*c)$ **(Asociatividad)**

3. $\exists e\in A/\forall a\in A, a*e=a$ **(Elemento neutro)**

4. $\forall a\in A,\exists! a^{-1}\in A/a*a^{-1}=e$ **(Elemento inverso)**

Cumplidas estas propiedades ya hablamos de un grupo.

Si se cumple, además, la siguiente propiedad:

5. $\forall a, b \in A, a * b = b * a$ **(Conmutatividad)**

Entonces hablamos de un grupo conmutativo o abeliano.

Multiplicación de un vector por un número real

Si partimos por ejemplo de

$2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}; 3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}; (-2\vec{a}) = -(2\vec{a})$ (**Fig.11**)

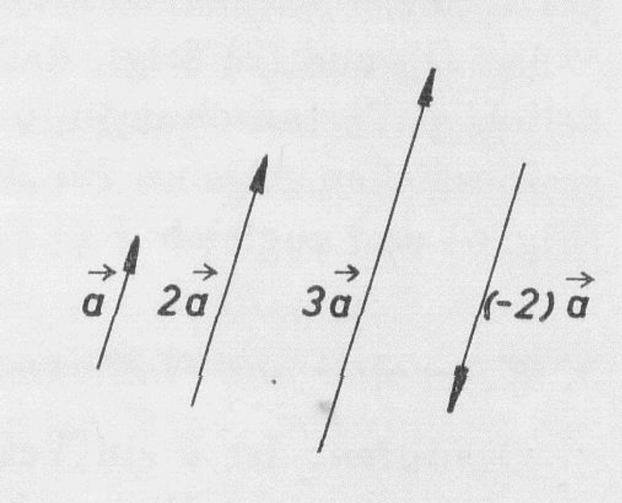

Fig. 11

Obtenemos la siguiente definición: Sea $\vec{a}$ un vector y x un número real, entonces, $x\vec{a}$ es el vector con $|x|$ veces la longitud de $\vec{a}$, con su misma u opuesta dirección, ya sea que $\vec{a}$ sea positivo o negativo.

Casos especiales son:

$0\vec{a} = \vec{0}$ **(5)**

$1\vec{a} = \vec{a}$ **(6)**

$x\vec{0} = \vec{0}$ **(7)**

$(-x\vec{a}) = -(x\vec{a}) = x(-\vec{a})$ **(8)**

La multiplicación es por tanto un estiramiento del vector $\vec{a}$ desde su punto de inicio, en un factor x. Como también debe considerarse el factor, $x = 0$, debemos agregar a los estiramientos la transformación nula, esto significa agregar una transformación (aunque ya no, uno a uno o inyectiva) que asocia a cada punto del espacio un punto fijo (el punto de inicio del vector).

Un número real se puede comprender como la descripción de un estiramiento, incluída la transformación nula. Si $x > 0$, entonces el vector estirado tiene la misma dirección que el vector original. Si $x < 0$, entonces, tiene dirección contraria; $x = 0$, por su parte,

conduce al vector nulo. Un estiramiento en el factor x =1 significa la transformación idéntica.

Si x es un número natural, entonces el vector estirado se consigue poniendo el original uno después de otro.

Si x es un número racional, se necesita, además de multiplicarlo por m, también dividirlo por n.

Si x es un número irracional (representado por una fracción decimal), significa un estiramiento en el factor x, en un proceso infinito de multiplicaciones y particiones, a través del cual, se aproxima el vector todo lo que se quiera.

Por ejemplo: $x = \sqrt{5} = 2{,}2360...$, entonces:

$$x\vec{a} = 2\vec{a} + \frac{2}{10}\vec{a} + \frac{3}{100}\vec{a} + \frac{6}{1000}\vec{a} + \frac{0}{10000}\vec{a} + ...$$

Leyes

1) $(x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$

2) $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$

3) $x(\vec{a}+\vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$

Observaciones

La primera ley define la suma de dos números reales a través de la suma de vectores escalados. En un lado tenemos una suma de números reales, escalares, y en el otro, una suma de vectores. En rigor no es la misma operación, están en distintos universos numéricos. Es asunto para otro nivel de estudio vectorial.

La segunda ley define el producto de dos reales, x e y, a través del ensamble de dos estiramientos, primero en el factor y, luego en el factor x.

La tercera ley nos dice que hay un estiramiento de O hacia el paralelógramo OACB y de nuevo hacia el paralelógramo OA'C'B' (Fig.12)

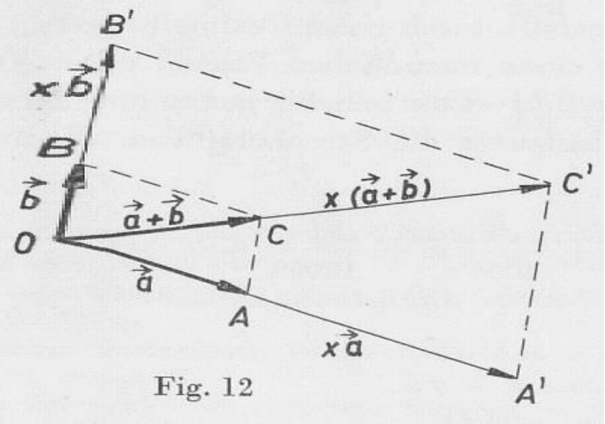

Fig. 12

En efecto, se tiene que $\overrightarrow{OC'} = x\overrightarrow{OC} = x(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = x\vec{a} + x\vec{b}$ **, por tanto, la ley 3)**

Estas leyes tienen como consecuencia que se pueda trabajar con los vectores del mismo modo que se hace con los números.

Por ejemplo:

$5\vec{a}+2\vec{c}-2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) = 5\vec{a}+2\vec{c}+\left\{-2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\right\}$ **Definición de la sustracción**

$= 5\vec{a}+2\vec{c}+(-2)[2\vec{a}+(-1)\vec{b}+\vec{c}]$ **De las propiedades (8) y (6)**

$= 5\vec{a}+2\vec{c}+(-2)2\vec{a}+(-2)(-1)\vec{b}+(-2)\vec{c}$ **De la ley (3)**

$= 5\vec{a}+2\vec{c}+(-4)\vec{a}+2\vec{b}+(-2)\vec{c}$ **De la ley (2)**

$= [5\vec{a}+(-4)\vec{a}]+[2\vec{c}+(-2)\vec{c}]+2\vec{b}$ **De las propiedades (1) y (2)**

$= 1\vec{a}+0\vec{c}+2\vec{b}$ **De las propiedades (5) y (6)**

$= \vec{a}+2\vec{b}$ **De la propiedad (3)**

Vectores Colineales y Coplanarios

Definición: **(Fig.13)** **Dos vectores se dicen *colineales,* si son paralelos a una única recta.**

En especial, al vector nulo se lo considera paralelo a cualquier recta. Además, si los vectores tienen el mismo punto de inicio, entonces están en una recta única.

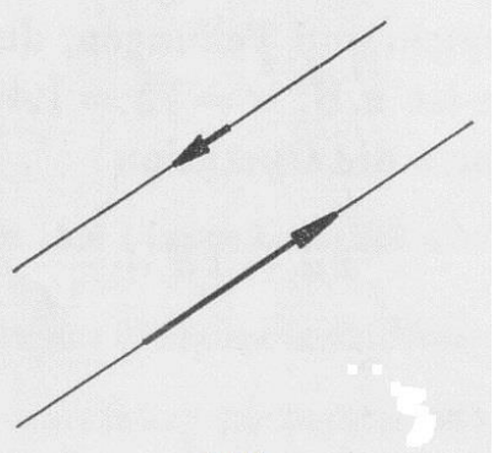

Fig. 13

Cada uno de los múltiplos $x\vec{a}$ **de un vector** $\vec{a}$ **, incluído el vector nulo,** $0\vec{a}=\vec{0}$ **es un vector colineal con** $\vec{a}$ **. Al revés, cada vector colineal con** $\vec{a}$ **es un múltiplo de** $\vec{a}$ **.**

Teorema 1: **Los vectores** $\vec{a},\vec{b}$ **no son colineales si y sólo sí, la ecuación,** $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ **se satisface sólo cuando** $x=y=0$

(en este caso diremos que $\vec{a}, \vec{b}$ son linealmente independientes...)

Demostración:

i) Sean $\vec{a}, \vec{b}$ vectores no colineales, con $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$. Sea, por ejemplo, $y \neq 0$, entonces podríamos escribir, $\frac{x}{y}\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ y por tanto, $\vec{b} = -\frac{x}{y}\vec{a}$, de donde $\vec{a}, \vec{b}$ serían vectores colineales ($\Rightarrow\Leftarrow$).

ii) Sean $\vec{a}, \vec{b}$ vectores colineales, entonces podríamos escribir, por ejemplo, $\vec{b} = x\vec{a}$, de donde, $x\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$ y, por tanto, la ecuación se satisface para un $y \neq 0$

Definición: (Fig.14) Tres vectores se dicen *coplanarios,* si son paralelos a un plano único, en tanto el vector nulo se considera paralelo a cada plano.

Si los vectores tienen el mismo punto de origen, entonces están en un mismo plano.

Toda combinación lineal $x\vec{a} + y\vec{b}$ de $\vec{a}, \vec{b}$ es coplanaria con $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

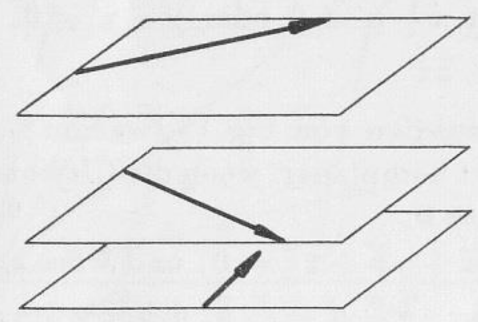

Fig. 14

Teorema 2: (Partición de un vector en dos vectores no colineales): Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no colineales, entonces cada vector $\vec{c}$, coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede escribir como suma (combinación lineal) de dos vectores colineales con $\vec{a}$ o con $\vec{b}$,

$$c = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (9)$$

Los vectores $x\vec{a}$ e $y\vec{b}$ se llaman *componentes vectoriales* y los números x e y son los *componentes escalares* de $\vec{c}$ según $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Demostración:

(i) Construyamos la partición, haciendo, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$**,** $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$**,** $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ **, con un mismo punto de origen (Fig.15).**

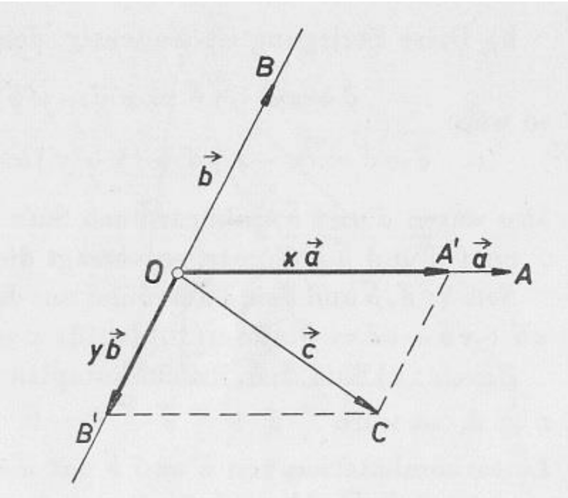

Fig. 15

Estos vectores son coplanarios. Las rectas paralelas a través de C hacia OA y OB, cortan las rectas OA y OB en los puntos A' y B'. Por tanto, $\overrightarrow{OA'} = x\vec{a}$ **,** $\overrightarrow{OB'} = y\vec{b}$ **, con** $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = x\vec{a} + y\vec{b}$

ii) Esta partición es unívoca, pues si no, se cumpliría que,

$c = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$, con $x \neq x'$, $y \neq y'$, de donde

$\vec{c} - \vec{c} = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$, con $x - x' \neq 0$, $y - y' \neq 0$, con lo cual los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ serían colineales (a partir del **Teorema 1**).

Y si estos vectores son colineales, entonces colapsa la construcción de la **Fig.15.**

Teorema 3: **Los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son coplanarios si y sólo si, la ecuación $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ sólo se cumple cuando $x = y = z = 0$ (Se trata entonces de vectores linealmente independientes en el espacio)**

Demostración: (i) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **vectores no coplanarios, sea además** $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$**, entonces si fuera, por ejemplo,** $z \neq 0$**, podríamos escribir,** $\frac{x}{z}\vec{a} + \frac{y}{z}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ **, de donde,** $\vec{c} = -\frac{x}{z}\vec{a} - \frac{y}{z}\vec{b}$ **, lo cual haría a** $\vec{c}$ **combinación lineal de los vectores** $\vec{a}, \vec{b}$ **, con** $\vec{a}, \vec{b}$ **coplanarios (**$\Rightarrow\Leftarrow$**).**

(ii) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **coplanarios. Entonces,** $\vec{a}, \vec{b}$ **son colineales o no lo son.**

Si lo son, $\vec{b} = x\vec{a}$ **, de donde,** $x\vec{a} + (-1)\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$

Si no lo son, a partir del Teorema 2, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ **, o bien,** $x\vec{a} + y\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$

En cada caso se cumple una ecuación de la forma, $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ **, en la que no todos los números** x, y, z **son iguales a 0.**

Teorema 4: (Partición de un vector en tres vectores no coplanarios) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **tres vectores no coplanarios, entonces cualquier vector** $\vec{d}$ **se puede particionar unívocamente en tres sumandos, que son colineales con los vectores dados, es decir, se puede expresar como combinación lineal de** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **.**

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \qquad \textbf{(10)}$$

Al igual que antes $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$ **son los *componentes vectoriales* de** $\vec{d}$ **, y** x, y, z **, sus *componentes escalares*, según** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **.**

Demostración:

(i) La partición se puede construir como en la (Fig.16)

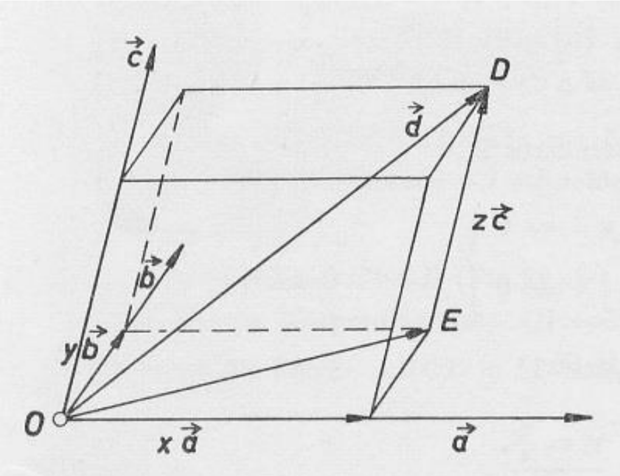

Fig. 16

Dibujamos, pues, los vectores con punto de origen común, O. A través del punto final D del vector $\vec{d}$ **ponemos los tres planos paralelos a** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **, respectivamente. Se genera un paralelepípedo. La esquina E se encuentra trazando una paralela a través de D hacia** $\vec{c}$ **y cortándola con el plano generado por** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **. En este plano,** $\overrightarrow{OE}$ **se puede particionar en términos de** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **, es decir,** $\overrightarrow{OE} = x\vec{a} + y\vec{b}$ **. Además,** $\overrightarrow{ED}$ **es colineal con** $\vec{c}$ **, es decir,** $\overrightarrow{ED} = z\vec{c}$ **, y por tanto,** $\vec{d} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

De manera análoga a la partición en el plano, la construcción de la Fig.16, colapsa si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **son vectores coplanarios.**

(ii) La partición es unívoca, pues si no, tendríamos: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$, **con** $x \neq x'$, $y \neq y'$, $z \neq z'$, **de donde,** $\vec{d} - \vec{d} = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} + (z - z')\vec{c} = \vec{0}$, **con** $x - x' \neq 0$, $y - y' \neq 0$, **o bien** $z - z' \neq 0$, **con** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, **coplanarios (según sabemos por el Teorema 3).**

Nota: Decimos que los vectores son linealmente independientes(LI), cuando ninguno de ellos se puede escribir como una combinación lineal de los otros (es decir, como una suma de múltiplos de los otros). De otro modo, hablamos de vectores linealmente dependientes (LD). Tres vectores en un plano y cuatro vectores en el espacio son siempre linealmente dependientes.

Ejemplo:

En el triángulo ABC de la **Fig.17**, se dan los puntos D y E sobre los lados BC y AC, respectivamente. de tal manera que $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ y $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. Además, se traza las transversales AD y BE, que se cortan en F. Se pide calcular los segmentos x e y, que forman los trazos $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$, de $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.

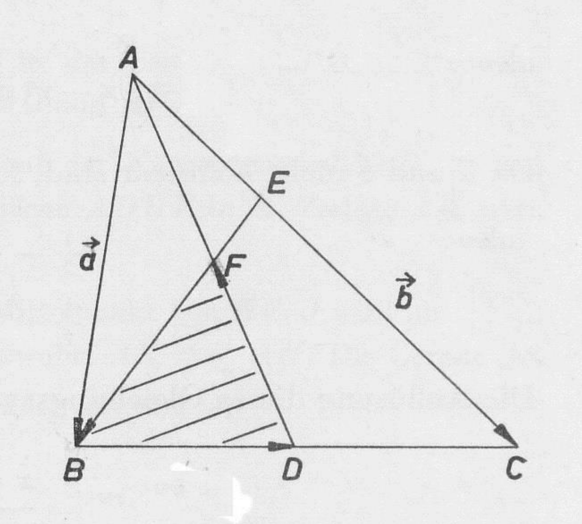

Fig. 17

Solución:

Hagamos $\overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EF} = y\overrightarrow{EB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Se tiene, además, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\vec{b}$

Para calcular $\overrightarrow{DF}$ y $\overrightarrow{FB}$ usaremos los vectores,

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = -(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}) - \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a}$$, además

$$\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}x\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b}$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} - y\overrightarrow{EB} = (1-y)\overrightarrow{EB} = (1-y)\vec{a} - \frac{1}{3}(1-y)\vec{b}$$

Como $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{FB}$ forman un triángulo vectorial cerrado, su suma es el vector nulo,

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}x\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b} + (1-y)\vec{a} - \frac{1}{3}(1-y)\vec{b} = \vec{0}\ ,$$

ordenando se obtiene,

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y)\vec{a} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)\vec{b} = \vec{0}$$

Ahora bien, como $\vec{a}, \vec{b}$ no son colineales, por el **Teorema 1,** se sigue que:

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - y = 0$

2) $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0$

Este sistema de ecuaciones entrega los siguientes valores para x e y: $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{4}$.

EJERCICIOS Y SOLUCIONES

1. Dibuja tres vectores, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, en el plano y construye:

i) El vector $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Solución: Ver Fig. 18

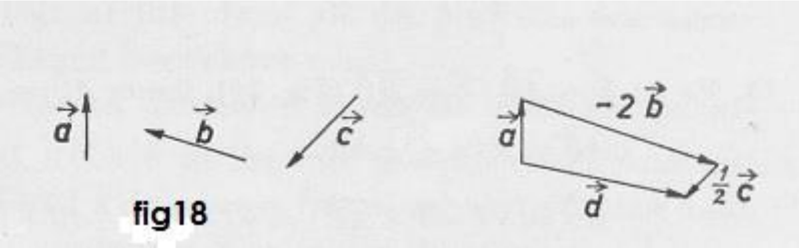

fig18

ii) El vector $\vec{e}$, tal que $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{e} = \vec{c}$

Solución: Ver Fig. 19.

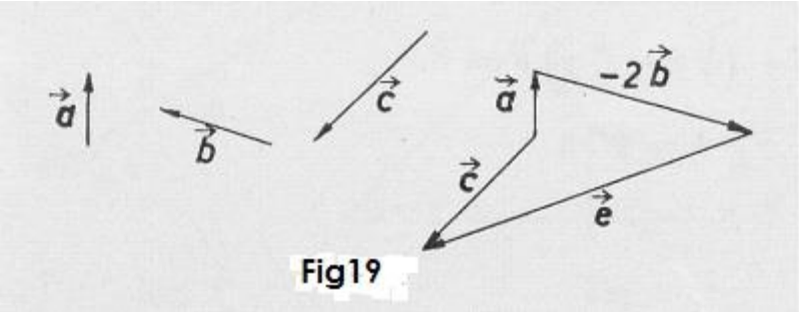

Fig19

2. Calcula $\vec{a}$ desde la ecuación: $\frac{1}{3}(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 2\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$

Solución: $\vec{a} = 20\vec{b} - 11\vec{c}$

3. Expresa en un paralelógramo $ABCD$ los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, a través de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

Solución: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

4. Prueba que si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son los vectores de los vértices de un triángulo hacia el centro de gravedad, entonces, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

Solución: Ver Fig. 21.

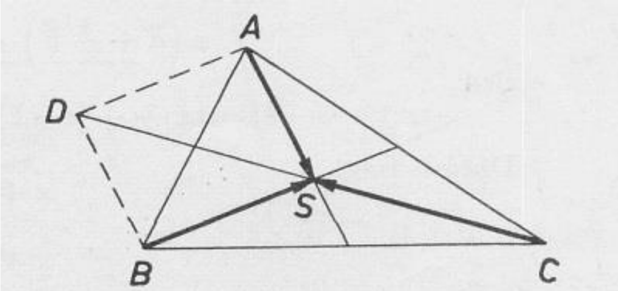

Fig. 21

Dibujamos D **de tal manera que** $ASBD$ **sea un paralelógramo. Además,** $\vec{u} = \overrightarrow{AS}$;

$\vec{v} = \overrightarrow{BS}$; $\vec{w} = \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SD}$ **.**

Por tanto, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$ (QED)

5. Prueba que las medianas de un cuadrilátero espacial están en un plano y forman un paralelógramo.

Solución: Ver Fig. 22.

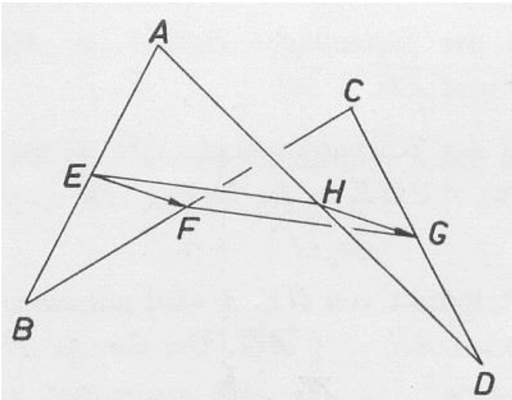

Fig. 22

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$; $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Y sea E punto medio de $\overline{AB}$; F punto medio de $\overline{BC}$; G punto medio de $\overline{CD}$ y H punto medio de $\overline{AD}$.

Por tanto: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{0} \text{ (cuadrilátero cerrado)}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

De ello se sigue que $EFGH$ es un paralelógramo y rectángulo plano.

6. En un triángulo ABC, D está en $\overline{AC}$ y E en $\overline{AB}$, de tal manera que $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{CD}=\frac{2}{5}\overline{AC}$; $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ se cortan en F .¿Qué partes representan los segmentos $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$ de $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$, respectivamente?

Solución: Análoga a la del ejemplo para la Fig. 17.

$x=\frac{5}{6}$; $y=\frac{1}{2}$

7. En un triángulo ABC, D está en $\overline{AC}$ y E en $\overline{BC}$, de tal manera que $\overline{AD}=\frac{1}{4}\overline{AC}$ y $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$; $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se cortan en F .¿Qué partes representan los segmentos $\overline{BF}$ y $\overline{EF}$ de $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$, respectivamente?

Solución: Análoga a la del ejercicio anterior.

$x=\frac{8}{9}$; $y=\frac{2}{3}$

8. En un cuadrado $ABCD$, E está en $\overline{BC}$ y F en $\overline{CD}$, tal que $\overline{BE}=\frac{1}{4}\overline{BC}$ y $\overline{CF}=\frac{1}{3}\overline{CD}$; $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$ se cortan en G . ¿Qué partes representan los segmentos $\overline{AG}$ y $\overline{DG}$ de $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$, respectivamente?

Solución: Análoga a la del ejercicio anterior.

$x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{4}{9}$

9. Prueba que en un paralelógramo las diagonales se dimidian.

Solución: Ver Fig. 23.

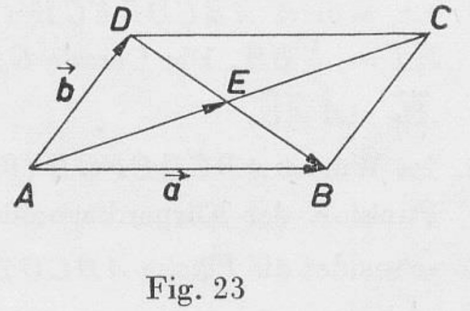

Fig. 23

Hacemos $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EB}=y\overrightarrow{DB}$.

Se tiene, por tanto, $\overrightarrow{AE}=x(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{EB}=y(\vec{a}-\vec{b})$

Y como $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\vec{a}$

$\vec{a} = x(\vec{a}+\vec{b}) + y(\vec{a}-\vec{b})$**, de donde,**

$(x+y-1)\vec{a} + (x-y)\vec{b} = \vec{0}$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ **no son colineales, se tiene que:**

$x+y-1=0$

$x-y=0$

Este sistema entrega los valores $x = y = \frac{1}{2}$ (QED)

10. Demostrar que en un triángulo las transversales de gravedad se cortan en la razón $2:3$.

Solución: Fig. 24.

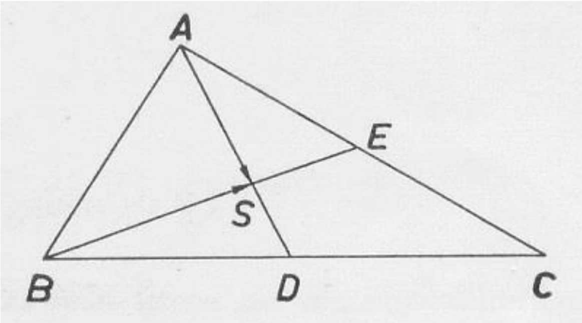

Fig. 24

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AS} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BS} = y\overrightarrow{BE}$

Se tiene, entonces, $\overrightarrow{AS} = x(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$

$$\overrightarrow{BS} = y(-\vec{a} + \overrightarrow{AE}) = y[-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})]$$

Y como $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}$, se sigue que

$$x(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{a} + y(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$$, de donde,

$(x + \frac{1}{2}y - 1)\vec{a} + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)\vec{b} = \vec{0}$, y como $\vec{a}$, $\vec{b}$ no son colineales,

$x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$

Este sistema entrega los valores $x = y = \frac{2}{3}$ (QED)

11. Probar que si en un paralelógramo $ABCD$ se une el vértice A con el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, entonces la diagonal $\overline{BD}$ queda dividida en tres partes iguales.

Solución: Ver Fig. 25.

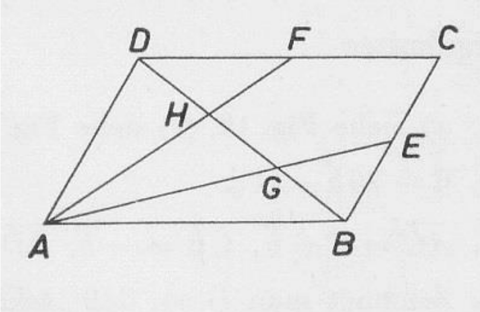

Fig. 25

Hacemos $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$$\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AF} = x(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a})$$

$$\overrightarrow{HB} = y\overrightarrow{DB} = y(\vec{a} - \vec{b})$$

Por tanto, $x(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) + y(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, de donde,

$(\frac{1}{2}x + y - 1)\vec{a} + (x - y)\vec{b} = \vec{0}$, y como $\vec{a}$, $\vec{b}$ no son colineales,

$$\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$$

$$x - y = 0$$

Por tanto, $x = y = \frac{2}{3}$, con $\overrightarrow{HB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ (QED)

12. En el cubo $ABCDEFGH$ (Fig.26), J está en la cara representada por el plano $BCGF$, tal que $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$. Se pide descomponer $\overrightarrow{AJ}$, en términos de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AF}$.

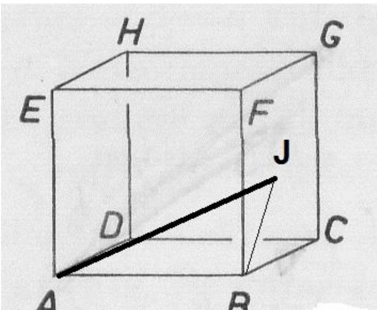

Fig.26

Solución: $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$

13. En el cubo $ABCDEFGH$ **(Fig.27),** J **está en la diagonal** $\overline{BH}$ **, tal que** $\overline{HJ}=\frac{1}{4}\overline{BH}$ **. La recta** GJ corta la superficie $ADHE$ en K **. Se pide descomponer el vector** $\overrightarrow{AK}$ **en términos de** $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.

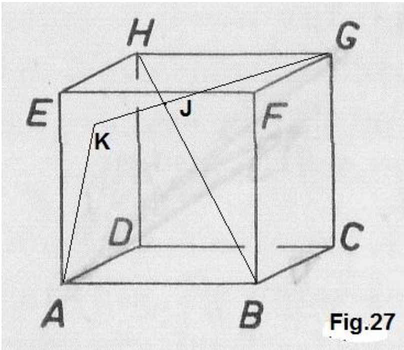

Fig.27

Solución: $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

14. En el cubo $ABCDEFGH$ **(Fig.28),** J **es el punto medio de** $\overline{HE}$ **. Se une** J **con el punto** K **de la diagonal** $\overline{AG}$, en tanto, $\overline{AK}=\frac{1}{6}\overline{AG}$ **. La recta** JK **corta la superficie** $ABCD$ **en** L **. Se pide descomponer el vector** $\overrightarrow{AL}$ **, en términos de** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

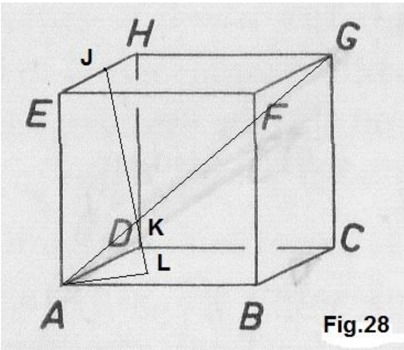

Fig.28

Solución: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{10}\overrightarrow{AD}$